



RAN - 2103000202030034

RAN-2103000202030034**F. Y. B. Sc. (Sem. - II) Examination April - 2023****Mathematics****MTH-201 (Mathematics - III)****Time: 2 Hours]****[Total Marks: 50****સૂચના : / Instructions**

(૧)

નીચે દર્શાવેલ નિશાનીવાળી વિગતો ઉત્તરવહી પર અવશ્ય લખવી.
 Fill up strictly the details of signs on your answer book

Name of the Examination:

F. Y. B. Sc. (Sem. - II)

Name of the Subject :

Mathematics : MTH-201 (Mathematics - III)

Subject Code No.: 2103000202030034

Seat No.:

Student's Signature

- (૨) દરેક પ્રશ્ન ફરજિયાત છે.
 (૩) જમણી બાજુનાં અંક પ્રશ્નના પૂરા ગુણ સૂચવે છે.
 (૪) પ્રચલિત સંકેતોને અનુસરો.

Q. 1. નીચેનાં ટૂંકા પ્રશ્નોનાં જવાબ આપો. (ગમે તે પાંચ)**[10]**

(1) જો $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} a & b \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ હોય તો $AB = BA$ થાય તો એવી a અને b ની કિંમત શોધો.

(2) હર્મેટીઅન શ્રેણિકની વ્યાખ્યા આપો. જો A હર્મેટીઅન શ્રેણિક હોય તો કોઈ પણ શ્રેણિક B માટે દર્શાવો કે $B^{\theta}AB$ હર્મેટીઅન શ્રેણિક છે.

(3) જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ હોય તો A પર હાર-પ્રક્રિયા $R_{1,2} (3)$, $R_{2,3} (-2)$ અને $2R_2$ સાનુક્રમ કરતા મળતો શ્રેણિક લખો.

(4) $2(x_1 - x_2)^2$ ચતુર્ભુજ સ્વરૂપને શ્રેણિકામાં ફેરવો.

(5) બે યુગપત સુરેખ સમીકરણોની સંહિત $4x + y = 1$ અને $8x + 2y = 2$ ઉકેલો.

(6) જો $A = [a_{ij}]$ હોય તો દર્શાવો કે $Trac(\lambda A) = \lambda Trac(A)$; $\lambda \in R$.

(7) શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ ના લાક્ષણિક બીજો શોધો.

(8) વ્યાખ્યા આપો :

- (i) લાક્ષણિક બીજ
- (ii) લાક્ષણિક સદિશ

Q. 2. નીચેનાં પ્રશ્નોમાંથી ગમે તે બેનાં જવાબ આપો.

[10]

(1) કોઈપણ ચોરસ શ્રેણિક A માટે સાબિત કરો કે :

- (1) $A + A^T$ સંમિત શ્રેણિક છે.
- (2) $A - A^T$ વિસંમિત શ્રેણિક છે.

(2) જો $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 7 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 7 \\ -2 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ હોય તો AB શોધો. શું BA શક્ય છે?

(3) સાબિત કરો કે દરેક ચોરસ શ્રેણિક A ને અનન્ય રીતે $P + iQ$ વડે દર્શાવી શકાય છે. જ્યાં P અને Q હર્મિટીઅન શ્રેણિકો છે.

Q. 3. નીચેનાં પ્રશ્નોમાંથી ગમે તે બેનાં જવાબ આપો.

[10]

(1) શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ ને હાર-કોટયાંક પ્રાથમિક હાર-પ્રક્રિયાઓનો ઉપયોગ કરીને શોધો.

(2) સામાન્ય શ્રેણિકની વ્યાખ્યા આપો. શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ નો વ્યસ્ત શ્રેણિક પ્રાથમિક હાર-પ્રક્રિયાઓનો ઉપયોગ કરીને શોધો.

(3) શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ ને હાર સોપાન સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

Q. 4. નીચેનાં પ્રશ્નોમાંથી ગમે તે બેનાં જવાબ આપો.

[10]

- (1) સમપરિમાણ સમીકરણ સંહિતને ક્યારે અસંખ્ય ઉકેલ મળે? નીચે આપેલ સમપરિમાણ સંહિતનો ઉકેલ હાર-પ્રક્રિયાઓનો ઉપયોગ કરી ને મેળવો.

$$x + y + z + w = 0$$

$$x + y + z - w = 0$$

$$x - y + z - w = 0$$

$$x - y - z - w = 0$$

- (2) ધારો કે $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ છે. λ ની કઈ કિંમતો માટે આ સંહિતને .

(i) અનન્ય ઉકેલ છે?

(ii) એક કરતા વધુ ઉકેલો છે?

- (3) શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ ને અનુરૂપ વિકર્ણ શ્રેણિક મેળવો.

Q. 5. નીચેનાં પ્રશ્નોમાંથી ગમે તે બેનાં જવાબ આપો.

[10]

- (1) સાબિત કરો કે

(1) શ્રેણિકના આપેલા આત્મ-સદિશને સંગત અનન્ય આત્મ-મૂલ્ય પ્રાપ્ત થાય છે.

(2) શ્રેણિકના આપેલ આત્મ-મૂલ્યને સંગત જુદા જુદા આત્મ-સદિશો પ્રાપ્ત થાય છે.

- (2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ માટે કેવી હેમિલ્ટન પ્રમેયનું સમર્થન કરો.

- (3) શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ ના આત્મમૂલ્યો શોધો અને તેને સંગત લાક્ષણિક સદિશો મેળવો.

ENGLISH VERSION

Instructions:

- (1) All questions are compulsory.
- (2) Digits to the right of each question indicate its marks.
- (3) Follow usual symbols.

Q. 1. Answer any FIVE from the following questions. [10]

- (1) If $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} a & b \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ then find the values of a and b such that $AB = BA$.
- (2) Define Hermitian matrix. If A is Hermitian matrix then for any matrix B , show that $B^{\theta}AB$ is Hermitian matrix.
- (3) If $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ then write the matrix after performing the row operations $R_{1,2} (3)$, $R_{2,3} (-2)$ and $2R_2$ on A .
- (4) Convert the quadratic form $2(x_1 - x_2)^2$ into the matrix.
- (5) Solve the system of simultaneous linear equations $4x + y = 1$ and $8x + 2y = 2$.
- (6) If $A = [a_{ij}]$ then show that $Trac(\lambda A) = \lambda Trac(A)$; $\lambda \in R$.
- (7) Find the given values of matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$
- (8) Define :
 - (i) Eigen value
 - (ii) Eigen vector.

Q. 2. Answer any TWO from the following: [10]

- (1) For any square matrix A , prove that :
 - (1) $A + A^T$ is symmetric matrix.
 - (2) $A - A^T$ is skew-symmetric matrix.

- (2) If $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 7 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 7 \\ -2 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ then find AB . Is BA possible?
- (3) Prove that any square matrix A can be uniquely expressed as $P + iQ$; where P matrix Q are Skew Hermitian matrix.

Q. 3. Answer any TWO from the following :

[10]

- (1) Find row-rank for the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ using Elementary Row Operations.
- (2) Define non-singular matrix. Find inverse of the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ using Elementary Row Operations.
- (3) Express matrix $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ into Row-Reduced Echelon form.

Q. 4. Answer any TWO from the following :

[10]

- (1) When does a Homogeneous system of equations have infinitely many solutions? Solve the following Homogeneous system using Elementary Row-Operations.
- $$x + y + z + w = 0$$
- $$x + y + z - w = 0$$
- $$x - y + z - w = 0$$
- $$x - y - z - w = 0$$
- (2) Let $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Find the values of λ for which this system has
- Unique solution?
 - Infinitely many solutions?
- (3) Obtain the similar diagonal matrix for matrix $A = \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$.

Q. 5. Answer any TWO from the following :

[10]

(1) Prove the following :

- (1) Unique eigen-value is obtained corresponding to the given eigen-vector for a matrix.
- (2) Different eigen-vectors are obtained corresponding to the eigen-value of a matrix.

(2) Verify the Cayley-Hamilton theorem for the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$.

(3) Find the eigen-values for the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ and find eigen vectors corresponding to the eigen-values.
